Johan Theil

Wat betekent × eigenlijk?

Begrip van vermenigvuldigen met breuken

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{15}$ is een lastige opgave voor leerlingen. Ook leerkrachten vinden het moeilijk om deze uit te leggen. Het helpt om er een aansprekende context bij te bedenken en deze op te lossen met behulp van een duidelijk rekenmodel. Maar hoe bedenk je zo'n context op het moment dat de leerling naast je bureau staat? Welke context zou u bij deze som kiezen? Om een goede context te vinden helpt het wellicht om te onderzoeken wat het keerteken eigenlijk precies betekent. Johan Theil laat in dit artikel zien hoe u dit kunt aanpakken.

De auteur van dit artikel, Johan Theil, is lang docent rekenen op Pabo Hogeschool Leiden geweest en heeft regelmatig bijdragen geleverd aan Volgens Bartjens. Vlak voor het ter perse gaan van dit nummer bereikte ons het droeve nieuws dat hij is overleden. Wij zullen zijn positief kritische inbreng enorm missen..

Met medewerking van Marije Bakker (M.Bakker@MB-Rekenadvies.nl), zelfstandig adviseur bij MB-Rekenadvies

In groep 3 leren de kinderen de beginselen van splitsen, optellen en aftrekken. Anne legt uit aan de leerkracht hoe zij rekent bij som 4 erbij 3. Ze kijkt naar het rekenrek en vertelt dat ze er eerst 1 bijdoet, dat is 5, en dan nog 2 erbij, dat is 7.

Het abstracte plusteken wordt geïntroduceerd als 'erbij'. In de praktijk lijken pabostudenten en leerkrachten dit wel eens overbodig te vinden. Voor een deel van de leerlingen is dit misschien zo, maar toch hebben ook veel leerlingen baat bij het begrip van de wiskundige 'vertaling' van de praktische situatie naar de formele optelsom.

Wat mij echter opvalt is dat een dergelijke introductie lang niet altijd gegeven wordt bij de keer- en deelsommen. Als ik studenten vroeg wat het keerteken eigenlijk betekende, kreeg ik meestal als antwoord: 'maal'. Maar dat is slechts een synoniem. Toch is dat ook wat *De Dikke van Dale* erover zegt: 'Ik ben twee keer bij je geweest; keer op keer; herhaaldelijk.' Keer wordt dus uitgelegd als iets wat je bij herhaling doet. In rekentermen: 3 keer 4 betekent 4 + 4 + 4 (we herhalen de optelsom). Maar keer heeft meer verschijningsvormen dan één voor één herhaald optellen.
Als je begrijpt dat 3 × 6 bijvoorbeeld betekent 3 doosjes met 6 eieren erin, dan begrijp je ook dat als je nog een keer 3 doosjes pakt, dat je dan dubbel zo veel eieren hebt.
Dus 6 × 6 is het dubbele van 3 × 6.
Ofwel 6 × 6 = (3 × 6) + (3 × 6) = 18 + 18 = 36.
Wanneer kinderen dit niet begrijpen en zich dus geen voorstelling kunnen maken van bijvoorbeeld 7 × 6, zullen zij terugvallen op één voor één herhaald optellen. Ze beginnen dan bij 1 × 6 en zeggen de tafel op tot ze bij 7 × 6 komen.
Het is belangrijk is dat leerlingen de juiste som kunnen bedenken bij eenvoudige en complexe verhalen en begrijpen wat de getallen in de

 © 2020 Koninklijke Van Gorcum

som betekenen in relatie tot het verhaal en dat ze dat verhaal kunnen schetsen.

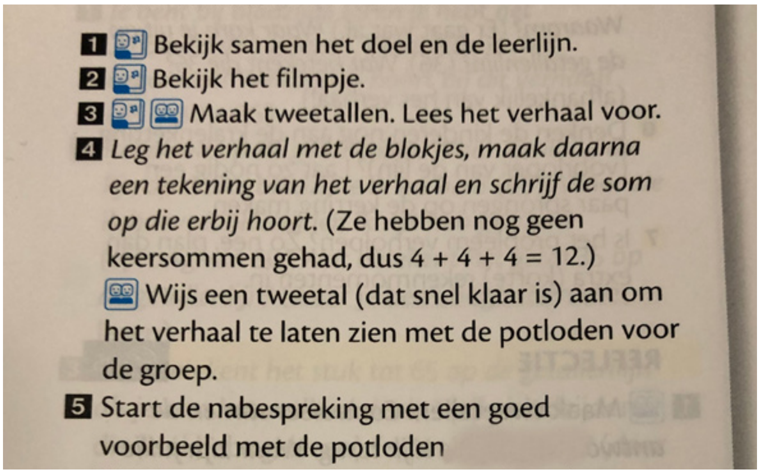
Delen
Een goed begrip van vermenigvuldigen is ook belangrijk voor het begrip van delen. Als leerlingen dat begrip niet hebben, zien we in de praktijk dat ze een ‘omgekeerde keersom’ zoeken. Maar dan zijn ze nog niet aan het delen? Sommige kinderen begrijpen dan nog niet dat delen herhaald aftrekken is en kunnen daar in dat geval ook niet over redeneren. Als ze bijvoorbeeld moeten delen met rest wordt dat dan een probleem omdat ze dan geen betekenis kunnen geven aan de rest.

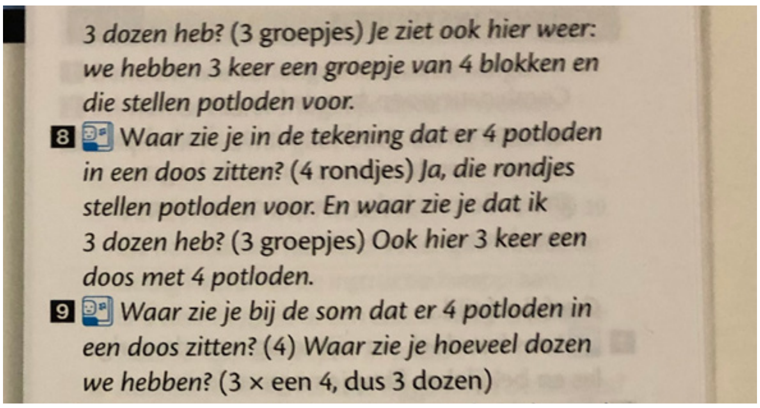
In de vermenigvuldigverhaaltjes zit altijd een groepsstructuur. Het keerteken krijgt in de verhaaltjes steevast de vertaling ‘van’ of ‘met’:

4 × 6 =	4 mandjes met 6 eieren	(groepsstructuur)
7 × 5 =	7 briefjes van 5 euro	(groepsstructuur)
8 × 8 =	8 rondjes van 8 km	(lijnstructuur)
6 × 4 of 4 × 6	6 rijen van 4 stickers, of 4 rijen van 6 stickers	(rechthoekstructuur)

Het is opvallend dat er nog lang niet altijd expliciete aandacht wordt besteed aan de betekenis van het keerteken in methodes. Gelukkig is dat in de nieuwe generatie Pluspunt (4) en Wereld in Getallen (5) wel het geval.

▼ 1: Handleiding Pluspunt 4, blok 4: Fragmenten uit de introductie van de keersommen


1 Bekijk samen het doel en de leerlijn.
2 Bekijk het filmpje.
3 Maak tweetallen. Lees het verhaal voor.
4 *Leg het verhaal met de blokjes, maak daarna een tekening van het verhaal en schrijf de som op die erbij hoort.* (Ze hebben nog geen keersommen gehad, dus 4 + 4 + 4 = 12.)
Wijs een tweetal (dat snel klaar is) aan om het verhaal te laten zien met de potloden voor de groep.
5 Start de nabespreking met een goed voorbeeld met de potloden


3 dozen heb? (3 groepjes) Je ziet ook hier weer: we hebben 3 keer een groepje van 4 blokken en die stellen potloden voor.
8 *Waar zie je in de tekening dat er 4 potloden in een doos zitten? (4 rondjes) Ja, die rondjes stellen potloden voor. En waar zie je dat ik 3 dozen heb? (3 groepjes) Ook hier 3 keer een doos met 4 potloden.*
9 *Waar zie je bij de som dat er 4 potloden in een doos zitten? (4) Waar zie je hoeveel dozen we hebben?* (3 × een 4, dus 3 dozen)

Met een goede introductie zullen de meeste kinderen het keerteken, net als het plusteken snel oppakken en zullen zij dit kunnen gebruiken in de betekenis van herhaald optellen.

Breuken
Anders wordt het echter in de bovenbouw. Om begrip van breuken en kommagetallen te ontwikkelen, geeft het inzicht om weer te kijken naar structuren:

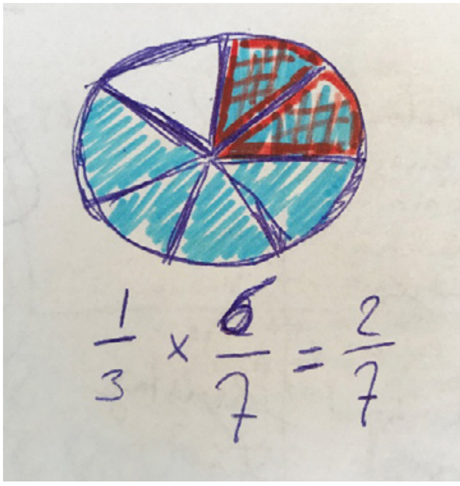
3 × $\frac{3}{4}$ =	3 filmpjes van 45 minuten	(groepsstructuur)
8 × 2 $\frac{1}{2}$ =	8 rondjes van 2 $\frac{1}{2}$ km	(lijnstructuur)
24 × 1,65 =	24 liter benzine van € 1,65 per liter	(groepsstructuur)
6 × 4,5 of 4,5 × 6	6 rijtjes van 4,5 tegels	(rechthoekstructuur)

Om een goede vertaling te maken van een kale, formele som naar de werkelijkheid en vice versa helpt het als de leerling de betekenis van het keerteken gebruikt. Hieraan wordt in methodes minder expliciet aandacht besteed. Waar dat wel gebeurt, is het vaak met verwijzing naar de reeds aanwezige kennis van het vermenigvuldigen zoals bijvoorbeeld in de instructie uit een opgave uit Wereld in Getallen groep 7 helemaal aan het begin van de leerlijn heel getal × breuk:

Kijk naar het recept. Je gaat dit voor 3 personen maken. Hoeveel heb je nodig? We beginnen met het ijs. Voor 1 persoon heb je $\frac{1}{5}$ liter ijs nodig. Hoeveel ijs heb je dan nodig voor 3 personen? Wat is de som? (een lange plussom: $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{5}$ of een keersom: 3 × $\frac{1}{5}$). Teken de som op een getallenlijn op je wisbordje. Net als je zou doen bij 3 × 5, maar nu is het 3 × $\frac{1}{5}$).

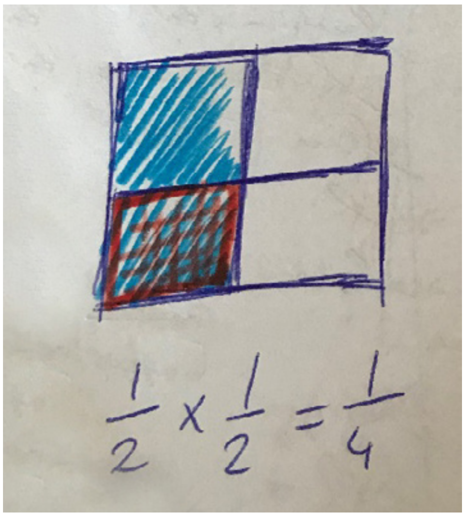
Dat het kan helpen om de betekenis van het keerteken te kennen, merkte ik aan de opgaven die ik mijn studenten voorlegde op de pabo. Vaak begon ik een van mijn eerste lessen met de vraag om een context te bedenken bij bijvoorbeeld de som $\frac{1}{3}$ × $\frac{6}{7}$. Oplossen lukte de meesten nog wel via teller × teller en noemer × noemer (= $\frac{6}{21}$ = $\frac{2}{7}$). Maar de contexten begonnen vaak met: ‘Ik heb een pizza waar nog $\frac{1}{3}$ deel van over is en een pizza waar ik nog 6 van

de 7 stukken heb'. Logischerwijs liep het groepje vervolgens vast. Na een onderwijsleergesprek, onder andere over het gegeven dat '×' 'van' kan betekenen (zoals eerder ook het geval was bij '7 briefjes van 5 euro'), lukte het ons een vertaling te maken. In dit voorbeeld: 'Een derde deel van $\frac{6}{7}$ ', oftewel 'Ik heb een pizza waar ik nog 6 van de 7 stukken van over heb ($\frac{6}{7}$). Vervolgens eet ik daar $\frac{1}{3}$ van op. Hoeveel houd ik nog over?' Zeker met een tekening erbij wordt duidelijk dat een derde deel in dit voorbeeld betekent: 2 van de 7 stukken, dus $\frac{2}{7}$ (zie figuur 2). Dat haal je van de $\frac{6}{7}$ af en dan houd je $\frac{4}{7}$ over.



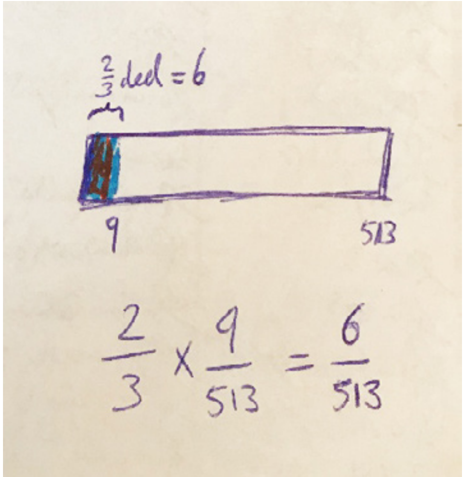
Figuur 2

Met dit inzicht wordt het ook makkelijker om te begrijpen dat de som $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ niks anders betekent dan: de helft van de helft. In een context: de helft van een halve cake of plak chocolade. Dus een kwart ($\frac{1}{4}$) (zie figuur 3).



Figuur 3

Met dit inzicht hoeft een op het eerste gezicht ingewikkelde som als $\frac{2}{3} \times \frac{9}{513}$ niet meer tijdrovend en ingewikkeld opgelost te worden via $\frac{2}{3} \times \frac{9}{513} = \frac{18}{1539} = \frac{6}{513}$. Een context die de opgave verheldert, is: 'Van een geldbedrag van € 513 is nog € 9 over. Hiervan is $\frac{2}{3}$ deel voor mij. Welk deel krijg ik van het oorspronkelijke bedrag?' Zie figuur 4 voor de verduidelijking: het gaat dus om $\frac{2}{3}$ deel van $\frac{9}{513}$, ofwel 6 euro (van de oorspronkelijke 513 euro).



Figuur 4

Ook bij de behandeling van de procenten kan de vertaling van het keerteken veel inzicht geven in de op te lossen rekenopgaven. Bijvoorbeeld bij de opgave om 10%, 1%, 99% en 75% van een powercheckbatterij in te kleuren op een strook (Kerninzichten), horen respectievelijk de opgaven: 10% × 1, 1% × 1, 99% × 1 en 75% × 1. Als meester Paul vervolgens vertelt dat een batterij normaalgesproken 10 uur brandt in een zaklamp, dan hebben we te maken met de opgaven: 10% × 10, 1% × 10, etc. Dus 10 % van 10 uur, 1% van 10 uur, etc. Een getekende strook maakt de situatie snel inzichtelijk.

Als leerlingen hier ook weer veel tijd besteden aan de betekenisverlening en reflectie, dan raken ze ook minder in verwarring met kale rijtjes als:

15% × € 350,- =	€ 52,50	(betekent 15% van € 350)
34% × 297 =	100,98	(betekent 34% van 297)
50% × 50% =	25%	(betekent 50% van 50%)

De vertaling van het keerteken helpt de leerling dus in de betekenisverlening en daarmee bij het kiezen van de juiste strategie om de opgave op te lossen. Maar ook voor de leerkracht is het inzicht belangrijk dat je × kunt blijven vertalen met het woordje 'van'. Daarmee heeft de leerkracht een extra tool in zijn/haar rekendidactische koffer om de opgaven uit te leggen aan leerlingen die een handje geholpen moeten worden. Met dit inzicht kun je makkelijker een aansprekende context voorschotelen (meestal eenvoudig te realiseren met euro's, meters of liters zoals de in dit artikel gebruikte voorbeelden) en een bijpassend rekenmodel op het digitale schoolbord tekenen (vaak een cirkel, strook of dubbele getallenlijn). «

Literatuur

- Wereld in Getallen 5, Handleiding groep 4, 's Hertogenbosch, Malmberg.
- Wereld in Getallen 5, Handleiding groep 7, blok 5, 's Hertogenbosch, Malmberg.
- Pluspunt 4. Handleiding Blok 4 groep 4. 'S Hertogenbosch: Malmberg

 © 2020 Koninklijke Van Gorcum